NÚMEROS (DES)COMPLEXOS ATRAVÉS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM NO ENSINO BÁSICO

Luzivalda Araujo de Sousa (1); Adriano Barroso Araujo (2); Sara Blenda da Silva Correia(3); Alessandra dos Santos da Silva (4)

(1) Licencianda em Matemática, UNIFESSPA, luzy.araujo21@outlook.com
(2) Licenciando em Matemática, UNIFESSPA, ad.barroso2016@gmail.com
(3) Licencianda em Matemática, UNIFESSPA, sara.blenda2000@gmail.com
(4) Mestre, Alessandra dos Santos da Silva, alessandras2silva@unifesspa.edu.br

Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Campus de Santana do Araguaia Instituto de Engenharia do Araguaia – IEA / Curso de Licenciatura em Matemática.

RESUMO

Este relato de experiência descreve a atividade que foi realizada com 21 alunos do Ensino Médio da EEEM Prof.ª Jorceli Silva Sestari, localizada na cidade de Santana do Araguaia-PA. A História da matemática foi utilizada como ferramenta para uma introdução dos números complexos, por se tratar de um conteúdo previsto para o terceiro bimestre. A aplicação desta proposta foi dividida em três momentos: desenvolvimento histórico dos números complexos, desenvolvimento de equações com propriedades em uma raiz e aplicação de uma atividade com os alunos. Ademais, percebemos que a História da Matemática é uma poderosa aliada no ensino de conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Números complexos; Ensino; História da Matemática.

ABSTRACT

This experience report describes an activity that was carried out with 21 high school students from EEEM Prof. Jorceli Silva Sestari, located in Santana do Araguaia-PA. The History of Mathematics was used as a tool for an introduction of complex numbers, since it is a predicted content for the third quarter. The application of this proposal was divided into three stages: presentation of the problem that gave rise to the set of complex numbers and their historical development, development of equations with properties of complexes in a root and application of an activity with students. Moreover, we realize that the History of Mathematics is a powerful ally in the teaching of mathematical content capable of optimizing student learning and at the same time showing the development of mathematics as a science.

Keywords: Complex numbers; Teaching; Story of the Mathematics.

1. INTRODUÇÃO

O ensino da matemática requer que o professor saiba transmitir conhecimentos de forma clara e coesa para que seus alunos entendam a matemática de forma contextualizada e isso torna-se uma tarefa difícil para muitos docentes dessa disciplina. O que motivou a escolha do tema deste trabalho foi o fato de que o professor de Matemática, tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, com pouco ou muitos anos de profissão, se depara continuamente com indagações de alunos que vão além das especificidades dos conteúdos trabalhados em sala de aula, a respeito do desenvolvimento da disciplina. A História da Matemática possibilita, dessa forma, que o professor utilize um valioso recurso quando se defronta com essas indagações sobre a origem do conteúdo abordado "Onde surgiu?", "Quem foi que criou" e "Pra que vou usar isso?". Tais idagações foram notadas pelos autores deste trabalho em experiências proporcionadas por cargas horárias de extensão em disciplinas de educação matemática e também pelo projeto Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), onde nas aplicações os discentes eram responsáveis por confeccionar materiais didáticos para ensino e aprendizagem de matemática.

A disciplina de História e Filosofia da Matemática ofertada no 3° período do curso de licenciatura em Matemática nos oportunizou conhecer a importância da história da matemática na no aprendizagemaquisição de conhecimento dos alunos e percebemos que ela pode contribuir para uma aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos, pois segundo Mancini "a aprendizagem significativa ocorre quando o aprendiz é capaz de receber novas informações e racionalizar, de forma a construir uma interação com o que já se sabe previamente e o que se acabou de conhecer"(MANCINI, 2005, p. 2). Diante dessa nova descoberta resolvemos aliar essa ferramenta com o ensino de números complexos no terceiro ano do Ensino Médio usando a origem do conjunto numérico para introduzir definições e propriedades importantes como a representação do número imaginário i.

O conceito de número complexo se desenvolveu gradativamente, como ocorreu com os demais tipos de números. Algumas equações do grau 2, como $x^2 + 1 = 0$ não tinham solução até o século XVI, pois para os estudiosos da época a raiz negativa não existia. Com o passar dos anos, alguns matemáticos viram o mesmo problema para equações do 3º, onde foi possível perceber que os números reais não eram suficientes para resolver este tipo de equação.

> "Os números complexos são frequentemente associados à resolução de equações quadráticas cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. Evocasse um contexto histórico para justificar a necessidade de se introduzir estes números na matemática, ainda que a sua história não seja detalhada" (PINTO, 2009, p. 11).

Os números complexos começaram a ser desenvolvidos por Scipione del Ferro. Ele desenvolveu uma teoria para a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas acabou não publicando sua teoria. Apenas a revelou a dois discípulos seus: Della Nave e Antônio Fior, dando a demonstração apenas ao primeiro.

Segundo (MODERNA, 2016) denomina-se conjunto dos números complexos o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais que satisfazem as seguintes definições:

I – Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

II- Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

III- Multiplicação: $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Assim, $z \epsilon \mathbb{C} \Rightarrow z = (a, b)$, em que $a \epsilon R$ e $b \epsilon R$.

Os números complexos são geralmente representados a partir de uma equação do 2º grau. Por exemplo quando resolvemos a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$, utilizando a usual fórmula de Bhaskara, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 1 * 5}}{2 * 1}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar esta raiz nos Reais não será possível, pois não existe um número m tal que m^2 seja igual a -16. Desse impasse surge a necessidade de um novo número complexo para solução dessa raiz. Assim consideremos alguns aspectos históricos apresentados pelo livro didático *Conexões com a Matemática* para compreensão da origem dos números complexos e suas aplicações nos tempos atuais. Niccolo Tartaglia (1500-1555) um filósofo e matemático italiano que descobriu uma fórmula geral para uma equação do tipo x^3 + px = q, com p e q pertencentes ao conjunto dos Reais. Porém, não publicou sua descoberta o que atraiu a atenção de Girolamo Cardano (1504-1576) que pediu a Tartaglia que revelasse sua descoberta. Assim, Tartaglia escreveu a Cardano sua descoberta em forma de versos pedindo para que não revelasse a mais ninguém sob forma de juramento solene de silêncio, porém o mesmo acabou quebrando o juramento quando publicou na sua obra intitulada *Ars Magna* ou *Arte Maior*.

Tabela 1: versos do poema de Tartáglia com equivalências matemática (Fonte: Ciência de Garagem).

Quando o cubo e a coisa juntos	
correspondem a algum número discreto,	$x^3 + px = q$
encontre outros dois números subtraídos dele.	$u - v = q$
Desde então, tenho mantido este costume	
que o seu produto sempre deve ser igual	
exatamente ao cubo de um terço da coisa.	$uv = \left(\frac{p}{q}\right)^3$
O resto, assim, como regra geral	
de suas raízes cúbicas subtraídas	
será igual à coisa principal.	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
No segundo destes atos,	
quando o cubo permanece sozinho	$x^3 = px + q$
observarás estes outros contratos:	
Dividirás a um só tempo o número em duas partes	$q = u + v$
de modo que um vezes o outro produza claramente	
o cubo de um terço da coisa exatamente.	$uv = \frac{p^3}{3}$
Então, destas duas partes, como regra habitual	
tomarás as raízes cúbicas somadas entre si	
e esta soma será sua reflexão.	$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
O terceiro destes cálculos	$x^3 + q = px$
é solucionado como no segundo se tomares bom cuidado,	
pois em suas essências, estão quase equiparados.	
Estas coisas encontrei, e não com passos vagarosos	
no ano de mil quinhentos e trinta e quatro	
com fundações fortes e resistentes	
na cidade cercada pelo mar.	[Veneza]

Logo mais tarde Cardano entraria em um impasse, pois não saberia como aplicar a fórmula de Tartaglia na equação $x^3 - 15x = 4$, chegando em um dos passos da resolução à raiz $\sqrt{121}$. Aparentemente, na época essa equação não teria solução, pois não existe raiz negativa no conjunto dos Reais gerando dessa forma o impasse da aplicação da fórmula de Tartaglia. Foi então que Raphael Bombelli (cerca de 1526-1573) propôs uma "ideia louca". Ele considerou o numero $\sqrt{-1}$ "imaginário" e desenvolveu regras para operar com esse tipo de número conseguindo dessa forma dar continuidade com a resolução proposta por Cardano. Essa aplicação repercutiu muito entre os teóricos da época e acabaram utilizando esses "números imaginários" em seus trabalhos.

Em 1977, Leonard Euler (1707-1783) usou pela primeira vez o símbolo i para representar o quadrado de $\sqrt{-1}$. Dessa forma tem se que $i^2 = -1$.

$$\pm\sqrt{-121} = \pm\sqrt{-121}*(-1) = \pm(\sqrt{-121}*\sqrt{-1}) = \pm 11\sqrt{-1} = \pm 11\sqrt{i^2} = \pm 11i$$

Porém, foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quem tornou o uso do símbolo de Euler amplamente aceito após seu uso em 1801. Trinta anos depois disso Gauss realizou um estudo sobre a representação geométrica de um número complexo e logo após introduziu o termo número complexo.

No início a existência de um novo tipo de número não foi muito bem aceita, mas graças aos esforços dos matemáticos Euler e Gauss e a descoberta da aplicação desses números em outras áreas tornando os números complexos uma das descobertas mais importantes da matemática.

> "Hoje em dia, aplicações desses novos números adquiriram grande importância no campo da Engenharia (por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Aerodinâmica (no cálculo da força de sustentação da asa de um avião), na Geometria Fractal, em sistemas dinâmicos (por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia), entre outros. " (MODERNA, 2016, P. 172).

Apresentar esse contexto histórico junto com resoluções implica trabalhar a matemática em sua totalidade, fazendo com que o aluno não tenha falhas em sua bagagem de conteúdos necessários em sua carreira acadêmica, além de contribuir na qualidade de ensino da matemática em sala de aula e na transformação da visão que os alunos têm dela.

2. OBJETIVO

Apresentar o surgimento do conjunto dos números complexo por meio de sua história e suas aplicações.

3. MÉTODO

Buscamos as principais bases históricas da origem dos complexos para selecionarmos as partes mais importantes e assim nos embasarmos. Logo após preparamos um plano de aula com 2 aulas de 35 e 30 minutos no 3º ano "E" do Ensino Médio da EEEM Prof.ª Jorceli Silva Sestari. A aplicação em seu primeiro momento consistiu em uma apresentação através de um questionamento sobre qual seria a solução da raiz de um número negativo e logo após apresentamos a origem desse conjunto através da História da Matemática, No segundo momento mostramos a solução da raiz negativa através de equações quadráticas e no terceiro momento aplicamos uma atividade que envolvia encontrar raízes pertencentes aos complexos.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

No decorrer desta proposta os estudantes promoveram uma discussão em sala de aula que lhes instigou a pensar sobre qual seria a raiz de um número negativo encontrado nas equações de segundo grau. Foi escrita uma equação de segundo grau no quadro e pedimos que os alunos nos guiassem na resolução dizendo passo a passo o que deveria ser feito. Logo após indagamos qual seria a raiz de um número negativo e eles não souberam responder e nos disseram que não existia. Neste momento os alunos apresentaram dificuldades em calcular as raízes de uma equação de segundo grau.

Figura1- Realização do 1º momento:
Fonte: Acervo dos autores

No segundo momento foi apresentado a origem histórica dos números complexos e como foi se desenvolvendo ao longo do tempo, além de destacar os principais matemáticos que contribuíram para essa descoberta e o uso de $\sqrt{-1}$, i^2 e i para posteriores resoluções de equações, além disso apresentamos os versos de Tartaglia para a turma e explicamos as referências matemáticas nele. Os alunos puderam acompanhar a explicação com uma pequena tabela contendo os nomes dos principais matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento dos números complexos. Depois mostramos a solução da equação apresentada no início da aplicação com o uso de $\sqrt{-1}$, i^2 e i mencionados na história dos complexos, além de outros exemplos de equações que nos davam raízes negativas como solução.

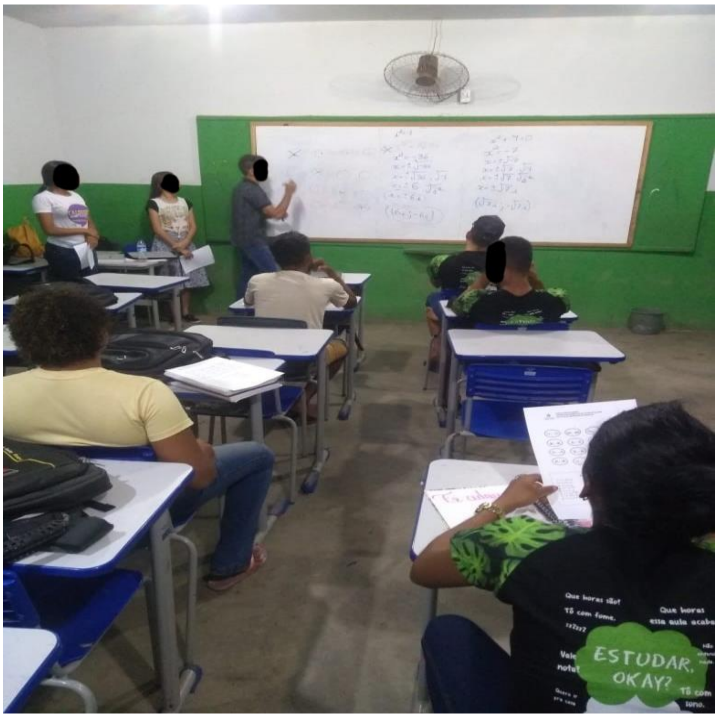

Figura 2 - Realização do 2º momento
Foto: Acervo dos autores

Aplicamos uma atividade que envolvia resolução de equações utilizando as propriedades do número imaginário i dentro da raiz e encontrar as duas raizes resultante da equação. Neste terceiro momento os alunos compartilharam suas descobertas e dúvidas. Foi bastante gratificante ver que os alunos estavam interessados na atividade e buscavam nossa ajuda para tirar suas dúvidas, principalmente com relação a resolução de equações.

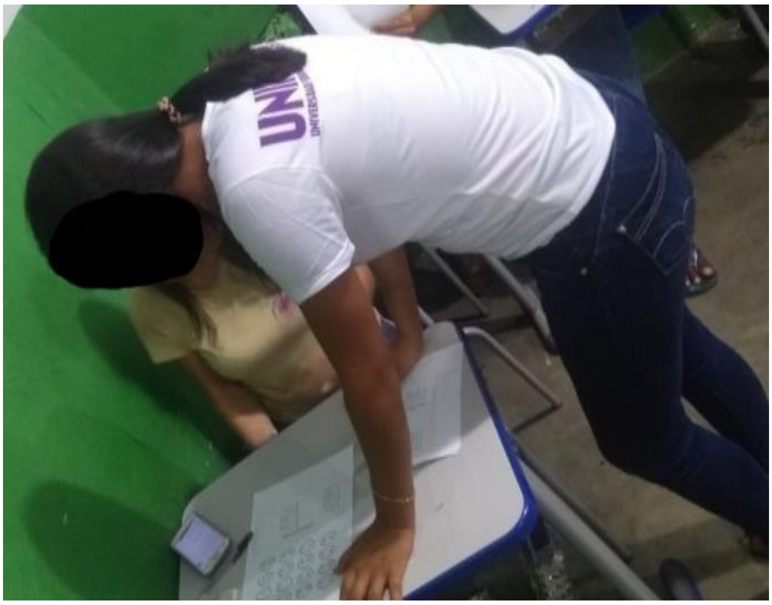

Figura 3 - realização do 3º momento:
Fonte: acervo dos autores

Depois de achar as raízes, os alunos tiveram que marcar o par encontrado e encontrar outras raízes até formarem quatro pares na diagonal, vertical ou horizontal concluindo dessa forma a atividade. Em todo momento acompanhamos os alunos no desenvolvimento da atividade auxiliando-os e tirando algumas duvidas frequentes com relação ao numero imaginário i.

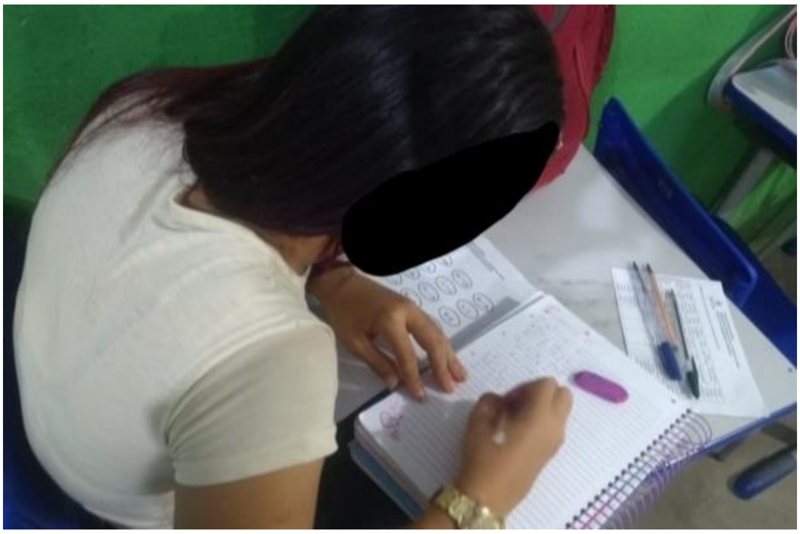

Figura 4 - aluna resolvendo o jogo das equações (3º momento):
Fonte: Acervo dos autores

Através dessa aplicação os alunos puderam relembrar como é resolvida uma equação do segundo grau completa e incompleta, além de aprender algumas propriedades e definições dos números complexos. Assim os alunos obtiveram uma pequena base para um conteúdo que está previsto para o terceiro bimestre. Durante esse momento percebemos as maiores dificuldades dos alunos e buscamos auxiliá-los da melhor forma possivel. A turma se mostrou confusa no início, mas depois ficaram mais curiosos sobre como resolver as equações e tirar a prova real do resultado. Assim os alunos puderam desenvolver suas habilidades bem como relacionar o conteúdo aprendido anteriormente com o que acabou de ser aprendido, além de conhecer um pouco da origem do conteúdo a ser aprendido.

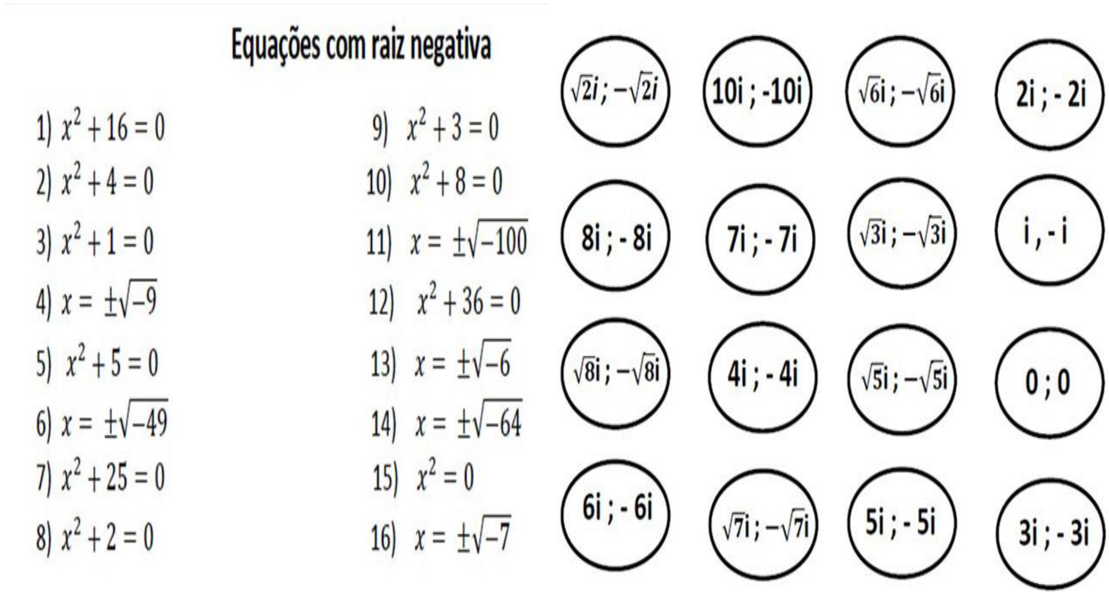

Figura 5 - Jogo das Equações com raiz negativa.:
Foto: Acervo dos autores

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os alunos se interessam mais pela aula, quando o docente dá uma justificativa do surgimento do assunto que será abordado, quando é esclarecido a história por trás do conteúdo, foi o que aconteceu com essa aplicação sobre os números complexos. Não seria ilusório então, acreditarmos na possibilidade da história dos números complexos e mais amplamente que a história da matemática possa despertar nos professores uma prática docente diferenciada, menos centrada em uma matemática de resultados prontos, e mais em uma matemática de descobertas e conexões. Dessa forma concluímos que a História da Matemática é uma ferramenta fundamental no ensino-aprendizagem dos conteúdos, por trazer resultados positivos em sala de aula.Assim podemos seguir o pensamento de (COSTA, 2016, p. 11):

> O estudo da História da Matemática faz parte do conjunto de valores que fundamentam o conhecimento, à medida que utilizando fatos históricos sobre a vida dos matemáticos e a finalidade de algumas descobertas, quando abordados em sala de aula, pode estimular os alunos ao aprendizado da disciplina e a desmitificar a ideia de que Matemática é direcionada apenas aos mais bem capacitados intelectualmente. (COSTA, 2016, p. 11):

Assim a História da matemática permite que o professor “encontre uma perspectiva para a matéria como um todo, relacionar os conteúdos dos cursos não apenas uns com os outros como também com o corpo, como o núcleo principal do pensamento matemático” (KLINE, 1976, p. 7).

Com essa aplicação ficou perceptível como é importante o uso da história para o ensino de novos conteúdos da matemática em sala de aula, pois dessa maneira os alunos além de compreender melhor sobre o que lhes é passado, conseguem também assimilar de forma significativa. Apresentar conteúdos matemáticos através da história acrescenta bastante na bagagem do aluno e facilita muito para que o aluno não esqueça das principais definições. Através dessa disciplina pudemos encontrar uma grande aliada na nossa formação docente além de adquirir experiências para aplicações em disciplinas futuras como Práticas Pedagógicas e Estágio Supervisionado. Ademais, sugere-se a aplicação da história da matemática no ensino de outros conteúdos como geometria, trigonometria e o estudo de aplicações desse conteúdo ao longo do tempo e suas contribuições para o futuro.

REFERÊNCIAS

BERNARDI, Alexandre Adriano. **GeoPlexo**: um material manipulável para o ensino dos números complexos. **Dissertação (Mestrado)** – Universidade Tecnológica do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Pato Branco, PR, 2015.

CAMARGO, Mara Viviane da Silva Pellegrinello; VRIESMAN, Teresa Cristina. **A Evolução dos Números Complexos**: história e aplicações. Tuiuti: Curitiba, 2012.

COSTA, Cleomar Luiz da. **A História da Matemática como estímulo ao Ensino-Aprendizagem** [manuscrito] / Cleomar Luiz da Costa. – 2016.

Equações algébricas do 3º e 4º graus. Ciência de Garagem. 2018. Disponível em: <https://cienciadegaragem.blogspot.com/2018/10/equacoes-algebricas-do-3-e-4-graus.html>

MODERNA (org.). **Conexões com a matemática**3. Ed., São Paulo: Moderna, 2016.

Origem dos Números Complexos. In: Matemática Complexa. 2012. Disponível em: <https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros- complexos>. Acesso em: 10 set. 2019.

KLINE, Morris. O fracasso da matemática moderna. São Paulo: IBRASA, 1976.

MANCINI, ARYTA ALVES. Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2005.

PINTO JUNIOR, Ulício **A História dos números complexos**: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand.**Dissertação (Mestrado)** - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro, RJ, 2009.

VIEIRA, LUCIA HELENA DA SILVA **Epistemologia dos números complexos.Monografia (Graduação em Matemática)**, Centro de CiênciasFísicas e Matemáticas Departamento de Matemática,Universidade Federal de Santa Catarina.Florianópolis, SC, 1999.