O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE DISCIPLINAS E PROFESSORES USANDO O MÉTODO HÚNGARO

Adriano Barroso Araujo (1); Cecilia Orellana Castro (2)
(1) Licenciando em Matemática, adriano.barroso@unifesspa.edu.br.
(2) Doutora, Professora do Instituto de Engenharia do Araguaia, ceciliaoc@unifesspa.edu.br.

RESUMO
Este trabalho propõe uma forma de resolução para o problema de alocação de professores e disciplinas no curso de Licenciatura em Matemática no Instituto de Engenharia do Araguaia da Unifesspa. O problema consiste em alocar 23 disciplinas que serão ofertadas em 5 turmas no período 2020.2 para um determinado número de docentes disponíveis no instituto. Objetivando a resolução do problema, utiliza-se um algoritmo denominado Método Húngaro que consiste em operações realizadas sobre uma matriz-custo com correspondência única até que seja admissível uma alocação ótima.

Palavra-chave: Problema de Alocação, Método Húngaro, Pesquisa Operacional.

ABSTRACT
This paper proposes a way of solving the problem of teacher and subject allocation in the Mathematics Degree course at the Unifesspa Institute of Engineering of Araguaia. The problem is to allocate 23 subjects that will be offered in 5 classes in the period 2020.2 to a certain number of available teachers in the institute. In order to solve the problem, we use an algorithm called Hungarian Method, which consists of operations performed on a single-matched cost matrix until optimal allocation is permissible.

Keywords:Allocation Problem, Hungarian Method, Operational Research

1. INTRODUÇÃO

Uma das formas de trabalhar com o problema de alocação de tarefas é utilizando um método de oti- mização discreto sobre a matriz C para problemas de alocação chamado de Método Húngaro. Esse nome teve origem em 1955 devido a H. W. Kuhn, pesquisador na área de programação linear, que em um de seus traba- lhos, fez homenagem aos descobridores do algoritmo em 1931: os húngaros E. Egerváry e D. König, sendo que este último demonstrou um teorema combinatório em 1916 que serviu de base para o algoritmo (Teorema de König).

O Método Húngaro pode ser aplicado em diversos problemas práticos de alocação de tarefas desde que seja construída, de forma conveniente, a matriz-custo C com as informações de que dispomos do problema. Além disso o algoritmo pode ser implementado computacionalmente, quando o volume de informações do problema for muito grande, (RODRIGUES; VIEIRA; AGUSTINI, 2005).

Neste trabalho é realizada uma aplicação do problema de alocação de tarefas usando o *Método Hún- garo*. O problema estudado consiste na designação de disciplinas para os professores do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Engenharia do Araguaia (IEA) da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (Unifesspa) .

Essa designação leva em consideração alguns fatores como concurso do corpo docente, horários e dias da semana. O curso de Licenciatura em Matemática é o curso mais antigo do instituto e atualmente é o curso com maior quantidade de turmas, sendo que no próximo período regular 2020.2 o mesmo terá 1 turma no período matutino e 4 turmas no período noturno.

De acordo com as grades curriculares do PPC do curso publicado no site do instituto (UNIVERSI- DADE. . . , 2016), serão ofertadas 23 disciplinas para as turmas no próximo período regular denominado 2020.2, além de dois Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC) I e II. Desta forma a coordenação do curso buscará a melhor forma de alocar 23 disciplinas a um determinado número de docentes disponíveis no instituto.

Diante dessa situação, o presente trabalho propõe um meio matemático de alocar essas disciplinas aos professores da melhor forma possível através da matemática aplicada, utilizando especificamente conhecimentos da pesquisa operacional.

1. OBJETIVO

Alocar disciplinas aos professores do Curso de Licenciatura em Matemática utilizando o Método Hún- garo, este método apresenta a melhor forma de alocação de tarefas que em pesquisa operacional chamamos de ótimo.

2. MÉTODO

Um problema básico dentro da pesquisa operacional consiste em alocar tarefas para determinadas ins- talações de forma otimizada. Um exemplo pode ser encontrado no problema de distribuição de funcionários e funções em determinada empresa, onde pode-se alocar de forma otimizada cada funcionário á um função.

O problema de alocação de tarefas requer que o número de tarefas e instalações sejam iguais. Em forma matricial, isto implica a construção de uma matriz de custos de tamanho $n \times n$, ou simplesmente de ordem n. Desta forma haverá $n!$ maneiras de alocar tarefas às instalações devido ao fato de que há n maneiras de alocar a primeira tarefa, $n-1$ maneiras de alocar a segunda tarefa, $n-2$ maneiras de alocar a terceira tarefa e assim por diante, até que encontremos 1 maneira de alocar a ultima tarefa. Dessa forma teremos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ formas de alocação, sendo uma dentre elas a forma ótima de alocação.

Existem outras maneiras de resolver um problema de alocação como afirma (SOARES, 2011), *ForaBruta*, *BranchandBound*, *Heursticas*, *SimulatedAnnealing*, porém utilizaremos um algoritmo chamado Método Húngaro descrito em (ANTON; RORRES, 2001).

O método húngaro necessita que o programador tenha apenas um bom conhecimento matricial para interpretar o problema e aplicar os passos que o algoritmo propõe para encontrar o ótimo. Dessa forma torna-se fácil realizar manualmente operações com matrizes de ordens superiores à 3. Apresentamos a seguir os passo sintetizados no seguinte algoritmo:

Algoritmo 1: Algoritmo do método Húngaro

Entrada: Matriz de custos: $C = (c_{i,j})$ de ordem n.
Saída: Matriz de alocação ótima $O = (o_{i\,j})$ de ordem n.

1 **início**
2 Subtrair a menor entrada de cada linha de C de todas as entradas da mesma linha;
3 Subtrair a menor entrada de cada coluna de C de todas as entradas da mesma coluna;
4 Riscar um traço ao longo de linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz sejam riscadas e utilizando um número mínimo de traços m;
5 **se** m=n **então**
6 A matriz resultante é de alocação ótima O;
7 **Sair**
8 **enquanto** $m < n$ **faça**
9 Determinar a menor entrada k não riscada por nenhum traço;
10 Subtrair k de todas as entradas não riscadas;
11 Somar k a todas as entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente;
12 Retornar à linha 4.

Pode-se entender melhor o método aplicando o algoritmo no seguinte problema extraído de (ANTON; RORRES, 2001). Uma faculdade pretende realizar a instalação de aparelhos de ar-condicionado em seus três prédios durante a semana que estará em recesso e recorre a três empresas para realizar um orçamento para cada prédio.

Tabela 1 – Tabela contendo propostas de orçamentos (em unidades de 1000 reais) feitas por cada Empresa

	Prédio I	Prédio II	Prédio III
Empresa I	53	96	37
Empresa II	47	87	41
Empresa III	60	92	36

Fonte: Elaboração própria baseando-se em (ANTON; RORRES, 2001)

Para resolver o problema acima, é considerada uma matriz de custos de alocação de empresa e o prédio, considerando os dados da Tabela 1. Sobre essa matriz aplicam-se os passos das linhas 2 e 3 do método húngaro, resultando na matriz M:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

O número mínimo de traços requisitados na matriz M pelo passo da linha 4 do algoritmo é igual a dois e, estão dispostos sobre a linha 2 e sobre a coluna 3 de M. Dessa forma a matriz ainda não possui solução ótima, pois não satisfaz a condição de otimalidade do passo da linha 5. Portanto seguiremos para o passo da linha 9. A menor entrada não riscada é 10, usando este valor para os passos das linhas 10 e 11, obtemos a seguinte matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O número mínimo de traços sobre a matriz é igual a 3, logo satisfaz a condição de otimalidade requerida pelo método na linha 5 do algoritmo, isto é, M é a matriz de alocação ótima O, encerrando assim a utilização do algoritmo de acordo com a linha 7 do mesmo. Para entendermos a alocação ótima da matriz devemos considerar as seguintes definições:

Definição 1. Dada uma matriz-custo C de ordem n, uma alocação de tarefas é um conjunto de n entradas da matriz tais que não há duas da mesma linha ou coluna.

Definição 2. A soma das n entradas de uma alocação é chamada o custo da alocação. Uma alocação com o menor custo possível é denominada uma alocação ótima.

Baseado nas duas definições anteriores, encontra-se as seguintes alocações ótimas:

$$O1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad O2 = \begin{pmatrix} & & 0 \\ 0 & & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

Cada entrada zero das matrizes O_1 e O_2 correspondem a um custo na matriz original disposta na Tabela 1. Desta forma temos que a soma total das propostas de O_1 e O_2 serão igual a $R\$176.000, 00.$ Assim, fica a critério da faculdade escolher uma das duas propostas de instalação de ar, ótimas.

O_1
Empresa I para o Prédio I
Empresa II para o prédio II
Empresa III para o prédio III

O_2
Empresa I para o Prédio III
Empresa II para o prédio I
Empresa III para o prédio II

3.1. APLICAÇÃO DO MÉTODO HÚNGARO

Para aplicar o algoritmo do método húngaro no problema de alocação de professores (P) e disciplinas (D) do Curso de Matemática do IEA, considere que o coordenador do curso de Matemática fica a cargo de contatar cada professor do corpo docente do instituto para saber seu interesse em cada disciplina para então formular uma tabela (matriz-susto). Para isso ele determina que cada professor deve escolher 5 disciplinas das 23 disponíveis, atribuindo níveis de interesse a elas da seguinte forma:

- 0: Escolheu a disciplina como primeira opção;
- 10: Escolheu a disciplina como segunda opção;
- 20: Escolheu a disciplina como terceira opção;
- 30: Escolheu a disciplina como quarta opção;
- 40: Escolheu a disciplina como quinta opção;
- 50: Não tem interesse na disciplina.

O próximo passo será usar as respostas dos mesmos para obter a matriz-tabela de custos. Suponha por exemplo que as respostas dos professores foram como descritas na seguinte tabela:

Tabela 2 – Tabela contendo as respostas dos professores de acordo ao seu nível de interesse

	0	10	20	30	40
RESPOSTA DO PROFESSOR 1	D1	D9	D14	D15	D22
RESPOSTA DO PROFESSOR 2	D2	D11	D8	D4	D16
RESPOSTA DO PROFESSOR 3	D3	D12	D18	D13	D17
RESPOSTA DO PROFESSOR 4	D6	D17	D21	D2	D4
RESPOSTA DO PROFESSOR 5	D13	D7	D12	D18	D3
RESPOSTA DO PROFESSOR 6	D23	D15	D5	D9	D14
RESPOSTA DO PROFESSOR 7	D18	D12	D3	D21	D17
RESPOSTA DO PROFESSOR 8	D23	D22	D15	D10	D9

Fonte: Elaboração própria

Ao final cada professor deve ser alocado a 3 disciplinas e para que o método funcione dividimos cada professor em três, pois no Método Húngaro necessário uma correspondência única entre professores e disciplinas, em outras palavras, o número de docentes deverá ser multiplicado por 3 totalizando 24 docentes. Além disso, devemos incluir uma disciplina fictícia (DF) para que a matriz-custo seja quadrada, visto que apenas contamos com 23 disciplinas para serem ministradas no próximo período regular de aulas. Sendo assim o professor que ficar com a DF será o professor que ficará com uma disciplina a menos. Diante dessas informações obtemos a seguinte tabela:

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21	D22	D23	DF
P1.1	0	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	50	20	30	50	50	50	50	50	50	40	50	50
P1.2	0	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	50	20	30	50	50	50	50	50	50	40	50	50
P1.3	0	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	50	20	30	50	50	50	50	50	50	40	50	50
P2.1	50	0	50	30	50	50	50	20	50	50	10	50	50	50	50	40	50	50	50	50	50	50	50	50
P2.2	50	0	50	30	50	50	50	20	50	50	10	50	50	50	50	40	50	50	50	50	50	50	50	50
P2.3	50	0	50	30	50	50	50	20	50	50	10	50	50	50	50	40	50	50	50	50	50	50	50	50
P3.1	50	50	0	50	50	50	50	50	50	50	50	10	30	50	50	50	40	20	50	50	50	50	50	50
P3.2	50	50	0	50	50	50	50	50	50	50	50	10	30	50	50	50	40	20	50	50	50	50	50	50
P3.3	50	50	0	50	50	50	50	50	50	50	50	10	30	50	50	50	40	20	50	50	50	50	50	50
P4.1	50	30	50	40	50	0	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	20	50	50	50
P4.2	50	30	50	40	50	0	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	20	50	50	50
P4.3	50	30	50	40	50	0	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	20	50	50	50
P5.1	50	50	40	50	50	50	10	50	50	50	50	20	0	50	50	50	50	30	50	50	50	50	50	50
P5.2	50	50	40	50	50	50	10	50	50	50	50	20	0	50	50	50	50	30	50	50	50	50	50	50
P5.3	50	50	40	50	50	50	10	50	50	50	50	20	0	50	50	50	50	30	50	50	50	50	50	50
P6.1	50	50	50	50	20	50	50	50	30	50	50	50	50	40	10	50	50	50	50	50	50	50	0	50
P6.2	50	50	50	50	20	50	50	50	30	50	50	50	50	40	10	50	50	50	50	50	50	50	0	50
P6.3	50	50	50	50	20	50	50	50	30	50	50	50	50	40	10	50	50	50	50	50	50	50	0	50
P7.1	50	50	20	50	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	50	40	0	50	50	30	50	50	50
P7.2	50	50	20	50	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	50	40	0	50	50	30	50	50	50
P7.3	50	50	20	50	50	50	50	50	50	50	50	10	50	50	50	50	40	0	50	50	30	50	50	50
P8.1	50	50	50	50	50	50	50	50	40	30	50	50	50	50	20	50	50	50	50	50	50	10	0	50
P8.2	50	50	50	50	50	50	50	50	40	30	50	50	50	50	20	50	50	50	50	50	50	10	0	50
P8.3	50	50	50	50	50	50	50	50	40	30	50	50	50	50	20	50	50	50	50	50	50	10	0	50

Figura 1 – Matriz inicial
Fonte: Elaboração própria

Note que cada linha da tabela anterior possui zeros, logo não há necessidade de aplicar o passo da linha 2 do algoritmo. Porém, existem colunas que não possuem zeros, logo deve ser realizado o passo da linha 3 do algoritmo. Logo após, aplica-se então o passo da linha 4 do algoritmo, isto é, busca-se maneiras de traçar linhas e colunas de forma que todas as entradas nulas sejam riscadas com o menor número possível de traços.

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21	D22	D23	DF
P1.1	0	50	50	20	30	50	40	30	0	20	40	40	50	0	20	10	40	50	0	0	30	30	50	0
P1.2	0	50	50	20	30	50	40	30	0	20	40	40	50	0	20	10	40	50	0	0	30	30	50	0
P1.3	0	50	50	20	30	50	40	30	0	20	40	40	50	0	20	10	40	50	0	0	30	30	50	0
P2.1	50	0	50	0	30	50	40	0	40	20	0	40	50	30	40	0	40	50	0	0	30	40	50	0
P2.2	50	0	50	0	30	50	40	0	40	20	0	40	50	30	40	0	40	50	0	0	30	40	50	0
P2.3	50	0	50	0	30	50	40	0	40	20	0	40	50	30	40	0	40	50	0	0	30	40	50	0
P3.1	50	50	0	20	30	50	40	30	40	20	40	0	30	30	40	10	30	20	0	0	30	40	50	0
P3.2	50	50	0	20	30	50	40	30	40	20	40	0	30	30	40	10	30	20	0	0	30	40	50	0
P3.3	50	50	0	20	30	50	40	30	40	20	40	0	30	30	40	10	30	20	0	0	30	40	50	0
P4.1	50	30	50	10	30	0	40	30	40	20	40	40	50	30	40	10	0	50	0	0	0	40	50	0
P4.2	50	30	50	10	30	0	40	30	40	20	40	40	50	30	40	10	0	50	0	0	0	40	50	0
P4.3	50	30	50	10	30	0	40	30	40	20	40	40	50	30	40	10	0	50	0	0	0	40	50	0
P5.1	50	50	40	20	30	50	0	30	40	20	40	10	0	30	40	10	40	30	0	0	30	40	50	0
P5.2	50	50	40	20	30	50	0	30	40	20	40	10	0	30	40	10	40	30	0	0	30	40	50	0
P5.3	50	50	40	20	30	50	0	30	40	20	40	10	0	30	40	10	40	30	0	0	30	40	50	0
P6.1	50	50	50	20	0	50	40	30	20	20	40	40	50	20	0	10	40	50	0	0	30	40	0	0
P6.2	50	50	50	20	0	50	40	30	20	20	40	40	50	20	0	10	40	50	0	0	30	40	0	0
P6.3	50	50	50	20	0	50	40	30	20	20	40	40	50	20	0	10	40	50	0	0	30	40	0	0
P7.1	50	50	20	20	30	50	40	30	40	20	40	0	50	30	40	10	30	0	0	0	10	40	50	0
P7.2	50	50	20	20	30	50	40	30	40	20	40	0	50	30	40	10	30	0	0	0	10	40	50	0
P7.3	50	50	20	20	30	50	40	30	40	20	40	0	50	30	40	10	30	0	0	0	10	40	50	0
P8.1	50	50	50	20	30	50	40	30	30	0	40	40	50	30	10	10	40	50	0	0	30	0	0	0
P8.2	50	50	50	20	30	50	40	30	30	0	40	40	50	30	10	10	40	50	0	0	30	0	0	0
P8.3	50	50	50	20	30	50	40	30	30	0	40	40	50	30	10	10	40	50	0	0	30	0	0	0

Figura 2 – Matriz com 22 traços
Fonte: Elaboração própria

No desenvolvimento, verifica-se que o número de traços é igual a 22 (figura 2), portanto a matriz ainda não possui a condição de otimalidade segundo a linha 5, pois $m = 22 = n = 24$. Assim, é necessário que se continue aplicando o algoritmo a partir da linha 9, onde serão realizadas as operações descritas e traçados novos traços para cobrir as entradas zeros.

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21	D22	D23	DF
P1.1	0	40	50	10	30	40	40	20	0	20	30	40	50	0	20	0	30	50	0	0	20	30	50	0
P1.2	0	40	50	10	30	40	40	20	0	20	30	40	50	0	20	0	30	50	0	0	20	30	50	0
P1.3	0	40	50	10	30	40	40	20	0	20	30	40	50	0	20	0	30	50	0	0	20	30	50	0
P2.1	60	0	60	0	40	50	50	0	50	30	0	50	60	40	50	0	40	60	10	10	30	50	60	10
P2.2	60	0	60	0	40	50	50	0	50	30	0	50	60	40	50	0	40	60	10	10	30	50	60	10
P2.3	60	0	60	0	40	50	50	0	50	30	0	50	60	40	50	0	40	60	10	10	30	50	60	10
P3.1	50	40	0	10	30	40	40	20	40	20	30	0	30	30	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P3.2	50	40	0	10	30	40	40	20	40	20	30	0	30	30	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P3.3	50	40	0	10	30	40	40	20	40	20	30	0	30	30	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P4.1	60	30	60	10	40	0	50	30	50	30	40	50	60	40	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P4.2	60	30	60	10	40	0	50	30	50	30	40	50	60	40	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P4.3	60	30	60	10	40	0	50	30	50	30	40	50	60	40	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P5.1	50	40	40	10	30	40	0	20	40	20	30	10	0	30	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P5.2	50	40	40	10	30	40	0	20	40	20	30	10	0	30	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P5.3	50	40	40	10	30	40	0	20	40	20	30	10	0	30	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P6.1	50	40	50	10	0	40	40	20	20	20	30	40	50	20	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P6.2	50	40	50	10	0	40	40	20	20	20	30	40	50	20	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P6.3	50	40	50	10	0	40	40	20	20	20	30	40	50	20	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P7.1	50	40	20	10	30	40	40	20	40	20	30	0	50	30	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P7.2	50	40	20	10	30	40	40	20	40	20	30	0	50	30	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P7.3	50	40	20	10	30	40	40	20	40	20	30	0	50	30	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P8.1	50	40	50	10	30	40	40	20	30	0	30	40	50	30	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0
P8.2	50	40	50	10	30	40	40	20	30	0	30	40	50	30	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0
P8.3	50	40	50	10	30	40	40	20	30	0	30	40	50	30	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0

Figura 3 – Matriz com 23 traços
Fonte: Elaboração própria

Podemos perceber que na tabela acima verifica-se a desigualdade $m = n$, pois $m = 23$ e $n = 24$ como mostra a figura 3. É necessário retornar para a linha 9 realizando novamente as operações sobre a matriz com 23 traços. Essa iteração resultará em uma matriz que satisfaz a condição da linha 5, pois é necessário que o número de traços seja igual ao número de linhas da matriz. Desta forma pode-se encerrar o uso do algoritmo, já que a matriz (figura 4) admite uma alocação ótima.

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21	D22	D23	DF
P1.1	0	40	60	10	40	50	50	20	0	30	30	50	60	0	30	10	40	60	10	10	30	40	60	10
P1.2	0	40	60	10	40	50	50	20	0	30	30	50	60	0	30	10	40	60	10	10	30	40	60	10
P1.3	0	40	60	10	40	50	50	20	0	30	30	50	60	0	30	10	40	60	10	10	30	40	60	10
P2.1	60	0	70	0	50	60	60	0	50	40	0	60	70	40	60	10	50	70	20	20	40	60	70	20
P2.2	60	0	70	0	50	60	60	0	50	40	0	60	70	40	60	10	50	70	20	20	40	60	70	20
P2.3	60	0	70	0	50	60	60	0	50	40	0	60	70	40	60	10	50	70	20	20	40	60	70	20
P3.1	40	30	0	0	30	40	40	10	30	20	20	0	30	20	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P3.2	40	30	0	0	30	40	40	10	30	20	20	0	30	20	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P3.3	40	30	0	0	30	40	40	10	30	20	20	0	30	20	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P4.1	50	20	60	0	40	0	50	10	40	30	30	50	60	30	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P4.2	50	20	60	0	40	0	50	10	40	30	30	50	60	30	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P4.3	50	20	60	0	40	0	50	10	40	30	30	50	60	30	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P5.1	40	30	40	0	30	40	0	10	30	20	20	10	0	20	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P5.2	40	30	40	0	30	40	0	10	30	20	20	10	0	20	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P5.3	40	30	40	0	30	40	0	10	30	20	20	10	0	20	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P6.1	40	30	50	0	0	40	40	10	10	20	20	40	50	10	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P6.2	40	30	50	0	0	40	40	10	10	20	20	40	50	10	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P6.3	40	30	50	0	0	40	40	10	10	20	20	40	50	10	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P7.1	40	30	20	0	30	40	40	10	30	20	20	0	50	20	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P7.2	40	30	20	0	30	40	40	10	30	20	20	0	50	20	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P7.3	40	30	20	0	30	40	40	10	30	20	20	0	50	20	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P8.1	40	30	50	0	30	40	40	10	20	0	20	40	50	20	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0
P8.2	40	30	50	0	30	40	40	10	20	0	20	40	50	20	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0
P8.3	40	30	50	0	30	40	40	10	20	0	20	40	50	20	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0

Figura 4 – Matriz com 24 traços
Fonte: Elaboração própria

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Utilizando as definições 1 e 2 pode se obter a alocação ótima da matriz-custo original. Resta encontrar a alocação ótima utilizando a matriz-custo disposta na figura 5 para então realizar a correspodencia entre a matriz com a alocação ótima (figura 5) e a matriz-custo original (figura 1).

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20	D21	D22	D23	DF
P1.1	0	40	60	10	40	50	50	20	0	30	30	50	60	0	30	10	40	60	10	10	30	40	60	10
P1.2	0	40	60	10	40	50	50	20	0	30	30	50	60	0	30	10	40	60	10	10	30	40	60	10
P1.3	0	40	60	10	40	50	50	20	0	30	30	50	60	0	30	10	40	60	10	10	30	40	60	10
P2.1	60	0	70	0	50	60	60	0	50	40	0	60	70	40	60	10	50	70	20	20	40	60	70	20
P2.2	60	0	70	0	50	60	60	0	50	40	0	60	70	40	60	10	50	70	20	20	40	60	70	20
P2.3	60	0	70	0	50	60	60	0	50	40	0	60	70	40	60	10	50	70	20	20	40	60	70	20
P3.1	40	30	0	0	30	40	40	10	30	20	20	0	30	20	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P3.2	40	30	0	0	30	40	40	10	30	20	20	0	30	20	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P3.3	40	30	0	0	30	40	40	10	30	20	20	0	30	20	40	0	20	20	0	0	20	40	50	0
P4.1	50	20	60	0	40	0	50	10	40	30	30	50	60	30	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P4.2	50	20	60	0	40	0	50	10	40	30	30	50	60	30	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P4.3	50	20	60	0	40	0	50	10	40	30	30	50	60	30	50	10	0	60	10	10	0	50	60	10
P5.1	40	30	40	0	30	40	0	10	30	20	20	10	0	20	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P5.2	40	30	40	0	30	40	0	10	30	20	20	10	0	20	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P5.3	40	30	40	0	30	40	0	10	30	20	20	10	0	20	40	0	30	30	0	0	20	40	50	0
P6.1	40	30	50	0	0	40	40	10	10	20	20	40	50	10	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P6.2	40	30	50	0	0	40	40	10	10	20	20	40	50	10	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P6.3	40	30	50	0	0	40	40	10	10	20	20	40	50	10	0	0	30	50	0	0	20	40	0	0
P7.1	40	30	20	0	30	40	40	10	30	20	20	0	50	20	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P7.2	40	30	20	0	30	40	40	10	30	20	20	0	50	20	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P7.3	40	30	20	0	30	40	40	10	30	20	20	0	50	20	40	0	20	0	0	0	0	40	50	0
P8.1	40	30	50	0	30	40	40	10	20	0	20	40	50	20	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0
P8.2	40	30	50	0	30	40	40	10	20	0	20	40	50	20	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0
P8.3	40	30	50	0	30	40	40	10	20	0	20	40	50	20	10	0	30	50	0	0	20	0	0	0

Figura 5 – Matriz de alocação ótima.
Fonte: Elaboração própria

O método distribuiu univocamente três disciplinas para cada professor, sendo que DF é a disciplina fictícia que representa a ausência de uma disciplina para o professor 7. Observe na matriz acima que o Professor 1 ficou com três disciplinas, sendo elas D1, D9 e D14 e que o Professor 2 ficou com as disciplinas D2, D11 e D8. Seguindo tal ordem podemos listar da seguinte forma:

- P1: D1, D9 e D14;
- P2: D2, D11 e D8;
- P3: D3, D12 e D16;
- P4: D6, D17 e D21;
- P5: D7, D13 e D19;
- P6: D5, D15 e D20;
- P7: D4, D18 e DF;
- P8: D10, D22 e D23.

Ficará a critério da coordenação alocar alguma disciplina ou projeto de ensino, pesquisa ou extensão para que o professor possa cumprir sua carga horária.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verifica-se que o objetivo deste trabalho foi alcançado com a utilização do Método Húngaro. O uso do algoritmo possibilitou encontrar a solução ótima para o problema real de alocação levando em consideração a demanda do instituto e satisfação de cada professor.

A utilização do Método Húngaro pode se estender para os demais cursos de forma separada ou conjunta, sendo necessário a implementação computacional do método já que a matriz-custo será de grande porte. Além disso, a aplicação do Método poderá ser implementada em outras áreas da universidade como por exemplo a alocação de salas conforme a demanda do instituto.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. [S.l.]: Bookman Porto Alegre, 2001. v. 8.

RODRIGUES, L. B.; VIEIRA, F. B. P.; AGUSTINI, E. O método húngaro de otimização para o problema da alocação de tarefas. *FAMAT em Revista, Uberlândia*, n. 4, 2005.

SOARES, H. C. de A. *Um estudo sobre o Problema de Alocação*. 2011. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso) — UNIFESP, São José dos Campos - SP, 2011.

UNIVERSIDADE Federal do Sul e Sudeste do Pará Unifesspa, Instituto de Engenharia do Araguaia (IEA) – Campus Santana do Araguaia, Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática. 2016. Disponível em: https://iea.unifesspa.edu.br/images/PPC_Mat/PPC-Matemtica---IEA-UNIFESSPA.pdf.

AGRADECIMENTOS

À Propit por nos incentivar à pesquisa através do programa de Iniciação Científica PIVIC. Este trabalho faz parte do Projeto de pesquisa: “Estudo das variantes do método de Pontos Interiores aplicadas ao problema de planejamento de câncer por radioterapia"sob a coordenação da professora Cecilia Orellana Castro.

Ao Instituto de Engenharia do Araguaia - IEA pela possibilidade de participar neste evento.